2. Dynamische Verfahren

2.1 Kapitalwertmethode

2.1.1 Finanzmathematische Grundlagen

2.1.1.1 Leitgedanke der Kapitalwertmethode

Die Kapitalwertmethode ist die erste der dynamischen Investitionsrechnungsmethoden. Sie soll die Vorteilhaftigkeit von Investitionen prüfen und beruht auf einer einfachen Idee: Sie vergleicht die Gesamtheit der Einzahlungen und Auszahlungen eines Objekts. Dazu sind alle Ein- und Auszahlungen auf den Investitionsbeginn (= Zeitpunkt 0) mit dem Kalkulationszinssatz abzuzinsen (zu diskontieren). Daher setzt die Kapitalwertmethode die Kenntnis einfacher finanzmathematischer Zusammenhänge voraus, die im Folgenden erörtert werden. Dabei soll nach finanzmathematischem Brauch der Zinssatz künftig in Dezimalform geschrieben werden. Es gilt also:

$$p \Rightarrow \frac{p}{100} = i$$

Wenn sich der Zinssatz p beispielsweise auf 6 Prozent beläuft, so drücken wir dies mit Hilfe der Dezimalzahl aus:

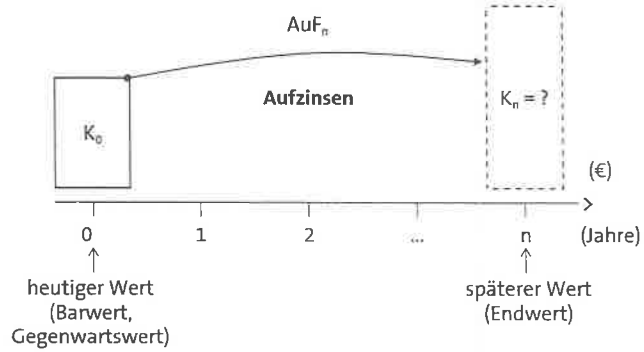
$$i = 0{,}06 = \frac{6}{100}$$

$$i = 6\ \%$$

2.1.1.2 Aufzinsen einer heutigen Zahlung

Welchen Endwert K_n erreicht ein Geldbetrag K_0, der für n Jahre angelegt wird, wobei die Zinsen jeweils am Jahresende dem Kapital zugeschlagen werden? Der Zinssatz sei i.

Sie verfolgen die Entwicklung des Kontostandes über drei Jahre, wie im folgenden Zeitstrahl und in Übersicht 2.1 dargestellt, und entwickeln daraus eine Gleichung.



Jahre	Wert des Kapitals am Jahresbeginn	Zinsen	Wert des Kapitals am Jahresende
1	K_0	$K_0 \cdot i$	$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i$ $= K_0 (1+i)$
2	K_1	$K_1 \cdot i$	$K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_1 (1+i)$ $= K_0 (1+i)(1+i)$ $= K_0 (1+i)^2$
3	K_2	$K_2 \cdot i$	$K_3 = K_2 + K_2 \cdot i = K_2 (1+i)$ $= K_0 (1+i)^2 (1+i)$ $= K_0 (1+i)^3$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	K_{n-1}	$K_{n-1} \cdot i$	$K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot i$ $= K_{n-1} (1+i)$ $= K_0 (1+i)^{n-1} (1+i)$ $= K_0 (1+i)^n$

Übers. 2.1: Entwicklung des Kapitals im Zeitablauf

Übersicht 2.1 zeigt, dass der Wert des Kapitals am Ende eines beliebigen Jahres n angegeben werden kann durch:

$$\boxed{K_n = K_0 (1+i)^n = K_0 \cdot \underbrace{AuF}_{\text{Aufzinsungsfaktor (AuF)}}} \tag{2.1}$$

Gleichung (2.1) heißt Aufzinsungsgleichung. Der Faktor $(1+i)^n$ heißt Aufzinsungsfaktor (AuF). Zur Vereinfachung setzt man häufig $(1+i) = q$. Der Aufzinsungsfaktor lautet dann q^n. Sie finden ihn und die anderen für die Investitionsrechnung wichtigen Faktoren im Tabellenanhang des Buches. Für die Übungsbeispiele im Buch reichen die im Tabellenanhang erfassten Werte aus. Sollten Sie zur Bewältigung spezieller Praxisfragen weitere Werte benötigen, so sind spezielle Tabellenwerke erforderlich[1] oder Rechner mit finanzmathematischen Funktionen. Vor den Tabellen für die finanzmathematischen Faktoren finden Sie eine Übersicht, die Ihnen schematisch zeigt, wann welcher Faktor anzuwenden ist. Sie nutzen die Übersicht folgendermaßen: Erstens stellen Sie das zu lösende Problem mit Hilfe eines Zeitstrahls dar. Zweitens suchen Sie in der Übersicht den zu dem Zeitstrahl gehörigen Faktor. Beachten Sie bitte: Die bekannte und gegebene Größe ist durch den Punkt gekennzeichnet; die Pfeilspitze zeigt stets auf die unbekannte und gesuchte Größe.

Beispiel *(Sparbuchfall)*

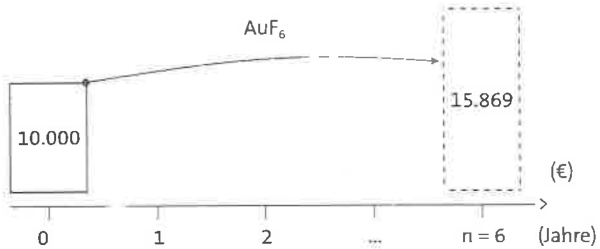
Auf welchen Betrag K_n wächst ein Sparguthaben von $K_0 = 10.000$ € in $n = 6$ Jahren beim Zinssatz von $i = 0{,}08 = 8\ \%$ an?

Lösung

$K_n = K_0 \cdot AuF_6$

$K_6 = 10.000 \cdot 1{,}586874$

$K_6 = 15.868{,}74$ (€)



Ergebnis: *Nach 6 Jahren kann man über 15.868,74 € verfügen.*

[1] K.-D. Däumler, Finanzmathematisches Tabellenwerk, S. 90 ff.

Beispiel *(Einwohnerzahl-Prognose)*

Die Einwohnerzahl einer Großstadt steigt durch Geburtenüberschuss und Zuwanderung jährlich um 6 % und betrug zuletzt 800.000. Wie viele Einwohner hat die Stadt in 15 Jahren, wenn die Einwohnerzahl weiter um 6 % jährlich wächst?

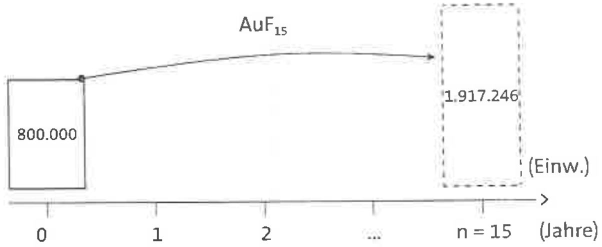
Lösung

Wir verwenden die bisher gebrauchten Symbole K und i analog weiter. K steht dann für die jeweilige Bevölkerungszahl und i für den jährlichen Bevölkerungszuwachs in Prozent pro Jahr.

$K_n = K_0 \cdot AuF_{15}$

$K_{15} = 800.000 \cdot 2{,}396558$

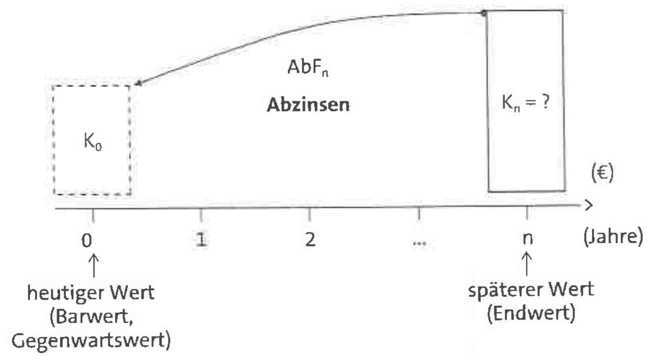
$K_{15} = 1.917.246$ (Einw.)



Ergebnis: *Die Großstadt hat nach 15 Jahren 1.917.246 Einwohner.*

2.1.1.3 Abzinsen einer späteren Zahlung

Welchen Gegenwartswert oder Barwert K_0 hat ein nach n Jahren fälliger Betrag K_n bei einem Zinssatz von i?



Die Gleichung (2.1) $K_n = K_0\,(1+i)^n$ ist nach dem gesuchten Wert K_0 (= Gegenwartswert oder Barwert) aufzulösen. Man erhält dann

(2.2) $$K_0 = K_n \cdot \frac{1}{(1+i)^n} \quad \text{oder}$$

$$\boxed{K_0 = K_n\,(1+i)^{-n} = K_n \cdot AbF}$$

→ Abzinsungsfaktor (AbF)

Diese Formel heißt Abzinsungsformel. Der Faktor

$$\frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}$$

ist der Abzinsungsfaktor. Er wird häufig auch als q^{-n} geschrieben. Weil diskontieren abzinsen heißt, wird der Abzinsungsfaktor gelegentlich auch Diskontierungsfaktor genannt. Sie finden den Abzinsungsfaktor (AbF) neben dem Aufzinsungsfaktor (AuF) im Tabellenanhang.

Beispiel *(Abfindung eines ausscheidenden Gesellschafters)*

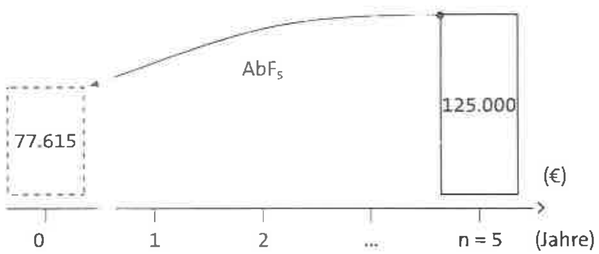
Ein Mitinhaber eines Unternehmens scheidet unter der Bedingung aus, dass er in 5 Jahren 125.000 € ausgezahlt erhält. Wie groß ist der jetzige Ablösungswert (Barwert) dieser Summe bei einem Zinssatz von i = 0,10 = 10 %?

Lösung

$K_0 = K_n \cdot AbF_5$

$K_0 = 125.000 \cdot 0{,}620921$

$K_0 = 77.615{,}13$ (€)

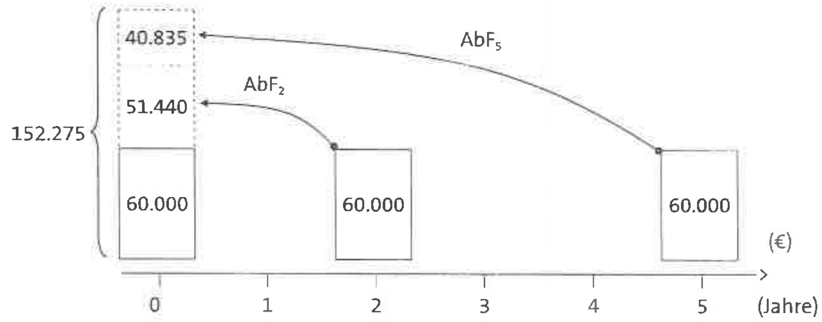


Ergebnis: *Der Barwert von 125.000 €, die in 5 Jahren fällig sind, beläuft sich auf 77.615,13 €.*

Beispiel *(Gegenwartswert dreier Zahlungen)*

Beim Kauf eines Hauses wird abgemacht, dass der Käufer 60.000 € in bar, 60.000 € nach zwei Jahren und weitere 60.000 € nach fünf Jahren bezahlen soll. Wie viel kostet das Haus zum Zeitpunkt 0, wenn man mit einem Zinssatz von i = 0,08 = 8 % rechnet?

Lösung



Man bezieht alle Teilbeträge auf den Zeitpunkt 0 und erhält dann:

$K_0 = 60.000 + 60.000 \cdot AbF_2 + 60.000 \cdot AbF_5$

$K_0 = 60.000 + 60.000 \cdot 0{,}857339 + 60.000 \cdot 0{,}680583$

$K_0 = 60.000 + 51.440 + 40.835$

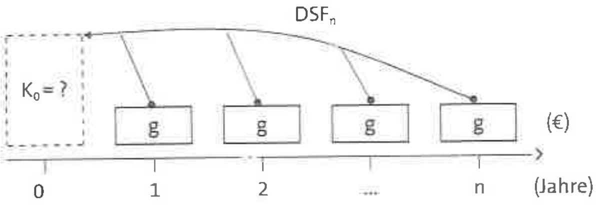
$K_0 = 152.275$ (€)

Ergebnis: *Der Gegenwartswert der drei Raten beläuft sich auf 152.275 €.*

2.1.1.4 Abzinsen und Summieren einer Zahlungsreihe

Wie groß ist der Gegenwarts- oder Barwert K_0 einer Zahlungsreihe, bei der für die Dauer von n Jahren jeweils am Jahresende ein im Zeitablauf gleich bleibender Betrag g anfällt? Der Zinssatz beläuft sich auf i.

Abzinsen und Summieren



Wenn man die Jahreszahlungen g jeweils einzeln diskontiert (abzinst), so erhält man für K_0 (= Gegenwartswert der Zahlungsreihe) den Ausdruck:

(2.3)
$$\boxed{K_0 = g \cdot \frac{1}{(1+i)} + g \cdot \frac{1}{(1+i)^2} + g \cdot \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + g \cdot \frac{1}{(1+i)^n}}$$

Die Berechnung des Barwertes K_0 ist nach dieser Methode stets möglich. Sie sehen jedoch, dass die Errechnung von K_0 mit zunehmender Länge der Zahlungsreihen, also mit wachsendem n, immer zeitaufwendiger wird. Es liegt daher nahe, Gleichung (2.3) zu vereinfachen.

Betrachten Sie Gleichung (2.3) genauer, so erkennen Sie, dass eine geometrische Reihe vorliegt, bei der sich jedes Glied durch Multiplikation des vorhergehenden mit dem Faktor $f = \frac{1}{1+i}$ ergibt. Setzen wir zur Vereinfachung $\frac{1}{1+i} = f$, so können wir statt (2.3) auch schreiben:

(2.4)
$$\boxed{K_0 = \underbrace{g \cdot f}_{\substack{\text{1. Glied} \\ a_1}} + g \cdot f^2 + \ldots + g \cdot f^{n-1} + g \cdot f^n}$$

Aus der Mathematik kennen wir die folgende Gleichung zur Bestimmung der Summe einer geometrischen Reihe:

(2.5)
$$\boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{1-f^n}{1-f}}$$
Summenformel für geometrische Reihe

Symbole allgemein	Bedeutung	Symbole in unserem Fall
S_n	Summe von n Gliedern einer geometrischen Reihe.	K_0
a_1	Erstes Glied der geometrischen Reihe.	$g \cdot f = g \cdot \frac{1}{1+i}$
f	Faktor, mit dem ein Glied der Reihe zu multiplizieren ist, um das nachfolgende zu erhalten.	$\frac{1}{1+i}$

Setzen Sie unsere Symbole in die Summenformel ein. Sie erhalten dann:

$$K_0 = g \cdot \underbrace{\frac{1}{1+i}}_{a_1} \cdot \underbrace{\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{1-\frac{1}{1+i}}}_{\frac{1-f^n}{1-f}}$$
| Brüche multiplizieren →

$$K_0 = g \cdot \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{1+i-1}$$
| mit $(1+i)^n$ erweitern →

(2.6)
$$\boxed{K_0 = g \cdot \frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n} = g \cdot DSF}$$
Diskontierungssummenfaktor (DSF)

Gleichung (2.6) dient zur Ermittlung des Barwertes einer Zahlungsreihe, bestehend aus n gleichen Zahlungen, die jeweils am Jahresende anfallen. Man hat also lediglich die konstante Jahreszahlung g mit dem Faktor

$$DSF = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

zu multiplizieren, um den Gegenwartswert der Zahlungsreihe zu erhalten. Weil dieser Faktor

1. alle Glieder der Zahlungsreihe mit dem Zinssatz i abzinst und
2. die Barwerte aller Glieder summiert,

heißt er Abzinsungssummenfaktor oder Diskontierungssummenfaktor (DSF). Gelegentlich wird er auch Kapitalisierungs- oder Barwertfaktor genannt. Eine alternative Schreibweise, bei der (1+i) = q gesetzt wird, lautet:

$$DSF = \frac{q^n - 1}{q^n (q-1)}$$

Auch den Diskontierungssummenfaktor DSF finden Sie im Tabellenanhang für viele Kombinationen von i und n. Bitte beachten Sie, dass der Diskontierungssummenfaktor nur dann anwendbar ist, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Zahlungen fallen stets am Periodenende an (postnumerando, nachschüssig).
2. Die Zahlungsreihen sind äquidistant, d. h. der zeitliche Abstand zwischen den Zahlungen ist gleich. Meist wählt man Zeitabstände von einem Jahr. Die Zahlungen können aber auch in periodischen Abständen von Quartalen, Monaten oder Tagen anfallen.
3. Die Zahlungsreihen sind uniform, d. h. die einzelnen Zahlungen sind gleich.

Bei unterschiedlichen Zahlungen und/oder verschiedenen zeitlichen Distanzen bleibt Ihnen nichts anderes übrig, als die Geldbeträge jeder Periode einzeln mit dem Abzinsungsfaktor (AbF) auf die Gegenwart zu diskontieren (abzuzinsen).

Beispiel *(Barwert des blauen Dunstes)*

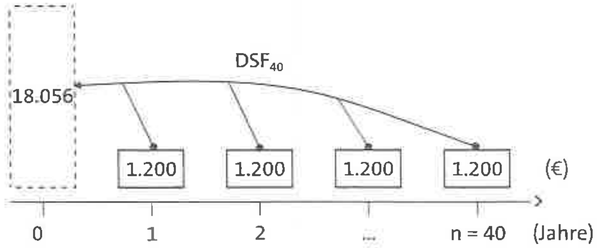
Ein Raucher gibt im Jahr 1.200 € für Tabakwaren aus. Wie groß ist der Gegenwartswert dieser Zahlungsreihe bei einer Restlebenserwartung des Rauchers von 40 Jahren und einem Zinssatz von i = 0,06 = 6 %?

Lösung

$K_0 = g \cdot DSF_{40}$

$K_0 = 1.200 \cdot 15{,}046297$

$K_0 = 18.056$ (€)



Ergebnis: *Der Barwert hat die Höhe von 18.056 €.*

Beispiel *(Barwert von Unterhaltszahlungen)*

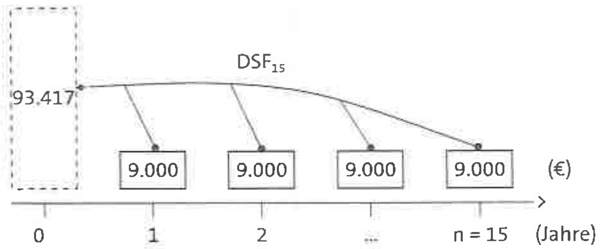
Ein geschiedener Vater hat sich verpflichtet, für sein bei der Mutter lebendes Kind ein Unterhaltsgeld von jährlich 9.000 € zu zahlen. Der Unterhaltszeitraum beträgt 15 Jahre. Mit welchem Betrag könnte er die Zahlungsreihe heute ablösen, wenn man von einem Zinssatz i = 0,05 = 5 % ausgeht?

Lösung

$K_0 = g \cdot DSF_{15}$

$K_0 = 9.000 \cdot 10{,}379658$

$K_0 = 93.417$ (€)

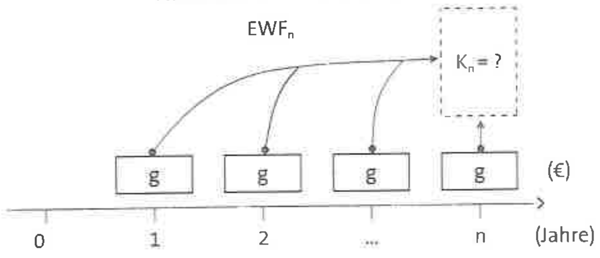


Ergebnis: *Die 15-jährige Rente von 9.000 € kann beim Zinssatz von i = 5 % durch die einmalige Zahlung von 93.417 € abgelöst werden.*

Hinweis: Rente heißt jede regelmäßige Geldzahlung. Nach der Zahlungsdauer unterscheidet man Zeitrente (feste Frist), Leibrente (unbekannte Frist) und ewige Rente (zeitlich unbegrenzt). Kapitalisierung ist die Umrechnung einer Rente in eine einmalige Zahlung g heute.

2.1.1.5 Aufzinsen und Summieren einer Zahlungsreihe

Welchen Endwert K_n hat eine Zahlungsreihe, bei der für die Dauer von n Jahren jeweils am Jahresende ein gleich bleibender Betrag g anfällt, wenn man mit einem Zinssatz von i rechnet?

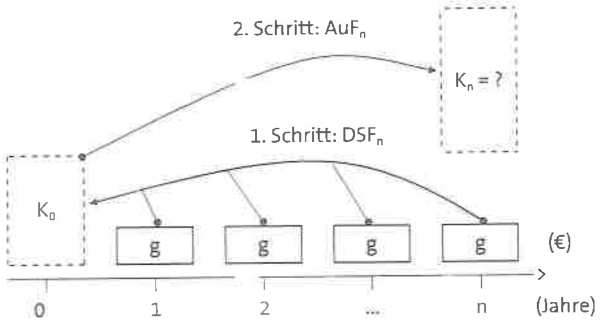


Die Lösung dieses Problems erfolgt in zwei Schritten:

(1) Sie berechnen den Barwert der Zahlungsreihe mit Hilfe des Diskontierungssummenfaktors (DSF).

(2) Sie zinsen den Barwert K_0 mit Hilfe des Aufzinsungsfaktors (AuF) auf den Zeitpunkt n auf.

Der folgende Zeitstrahl verdeutlicht die beiden Schritte:



Für K_0 kann man schreiben (1. Schritt): $K_0 = g \cdot DSF = g \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$

Für K_n muss gelten (2. Schritt): $K_n = K_0 \cdot AuF = K_0 (1+i)^n$

Unter Berücksichtigung der K_0-Gleichung lässt sich die K_n-Gleichung wie folgt schreiben:

$$K_n = \underbrace{g \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}}_{K_0} \cdot (1+i)^n \qquad | \text{ kürzen mit } (1+i)^n \rightarrow$$

(2.7)
$$\boxed{K_n = g \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = g \cdot EWF}$$

Endwertfaktor (EWF)

Der Faktor $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

heißt Endwertfaktor (EWF) oder Aufzinsungssummenfaktor. Er gestattet die Bestimmung jener einmaligen Zahlung zum Zeitpunkt n, die einer Zahlungsreihe mit gleich bleibenden Jahreszahlungen bei einem Zinssatz von i wirtschaftlich gleichwertig (äquivalent) ist. Sie finden ihn im Tabellenanhang, wo auch seine alternative Schreibweise mit (1+i) = q notiert ist:

$$EWF = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

***Beispiel** (Endwertermittlung)*

a) Ein Soldat hat sich auf acht Jahre zur Bundeswehr verpflichtet. Am Ende seiner Bundeswehrzeit möchte er sich ein Auto kaufen. Zu diesem Zweck legt er jeweils am Jahresende 1.500 € zurück, worauf ihm seine Bank 6 % Zinsen gewährt. Die Zinsen werden ihm stets am Jahresende gutgeschrieben und im folgenden Jahr mitverzinst. Wie viel kann er nach acht Jahren für den Wagen ausgeben?

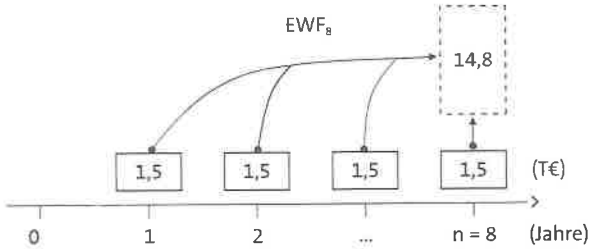
b) Der Industrielle F. verspricht dem Abgeordneten L. eine jährliche Zahlung von 200.000 €. Wie viel kann L. nach zwei Legislaturperioden abheben, wenn er das Geld jeweils am Jahresende bei seiner Bank einzahlt, die ihm 7,5 % Zinsen gewährt?

Lösung a)

$K_n = g \cdot EWF_8$

$K_n = 1.500 \cdot 9{,}897468$

$K_n = 14.846$ (€)

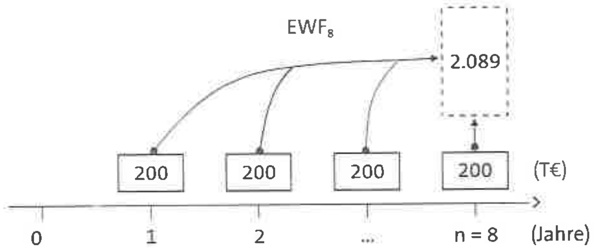


Lösung b)

$K_n = g \cdot EWF_8$

$K_n = 200.000 \cdot 10{,}446371$

$K_n = 2.089.274$ (€)



Ergebnis: *Der Soldat kann nach acht Jahren 14.846 € abheben. Der Abgeordnete verfügt nach acht Jahren über 2,089 Millionen Euro.*

Beispiel *(Endwert des blauen Dunstes)*

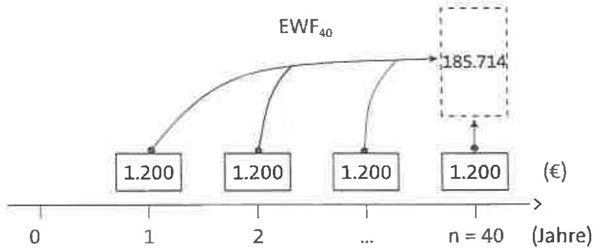
Ein Raucher gibt im Jahr 1.200 € für Tabakwaren aus. Wie groß ist der Endwert dieser Zahlungsreihe bei einer Restlebenserwartung des Rauchers von 40 Jahren und einem Zinssatz von i = 0,06 = 6 %? Wie erhält man bei gegebenem Endwert den Barwert? Wie kann man den Barwert noch errechnen?

Lösung

$K_n = g \cdot EWF_{40}$

$K_n = 1.200 \cdot 154{,}761966$

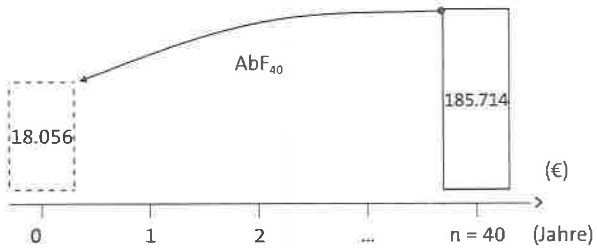
$K_n = 185.714$ (€)



$K_0 = K_n \cdot AbF_{40}$

$K_0 = 185.714 \cdot 0{,}097222$

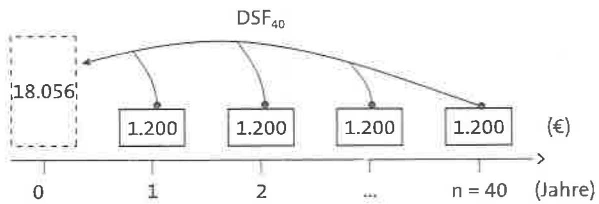
$K_0 = 18.055$ (€)



$K_0 = g \cdot DSF_{40}$

$K_0 = 1.200 \cdot 15{,}046297$

$K_0 = 18.056$ (€)



Ergebnis: Der Endwert des blauen Dunstes beläuft sich auf 185.714 €. Bei gegebenem Endwert erhalten Sie den zugehörigen Barwert, indem Sie den Endwert mit dem Abzinsungsfaktor (AbF) multiplizieren, bei gegebener Zahlungsreihe, indem Sie diese mit dem Diskontierungssummenfaktor (DSF) kapitalisieren.

2.1.2 Kapitalwertkriterium

Die Kapitalwertmethode gehört zu den wichtigsten Investitionsrechnungsverfahren. 1985 nutzten sie 48 % der deutschen Großunternehmungen, 1989 setzten sie schon 59 % der Umsatzmilliardäre ein, 1996 waren es 73 % (vgl. S. 32). Daneben nutzten 1996 40 % der Mittelständler die Kapitalwertmethode. Die Zahl der Unternehmungen, die ihre Investitionsentscheidungen unmittelbar aufgrund des Kapitalwertes fällen, liegt allerdings etwas unter den genannten Werten. Denn manche Unternehmungen, die den Kapitalwert errechnen, nutzen ihn nur als Vorstufe zur Ermittlung der Investitionsrendite (vgl. Kapitel 2.2: Interne Zinsfuß-Methode) oder der Annuität der Investition (vgl. Kapitel 2.3: Annuitätenmethode). Neben der Kapitalwertmethode setzen die Unternehmen häufig noch andere Entscheidungshilfen ein: Im Durchschnitt verwenden die Großunternehmungen heute 3,4 Investitionsrechnungsmethoden nebeneinander. Wenn die Unternehmungen theoriekonform vorgehen würden, müssten alle dynamisch rechnenden Investoren ihre Kalküle auf der Basis von Ein- und Auszahlungen erstellen. Diese werden mit 48 % mittlerweile zwar am häufigsten als Rechnungselemente genutzt, in 64 % der Anwendungsfälle werden aber nicht-zahlungswirksame Größen (Ausgaben/Einnahmen, Kosten/Leistungen, Aufwendungen/Erträge) genannt. 43 % der Unternehmungen verwenden nebeneinander unterschiedliche Rechnungselemente; 57 % setzen für alle Rechenverfahren die gleichen Rechenelemente ein[1].

Die Kapitalwertmethode (Barwertmethode, Diskontierungsmethode, Gegenwartsmethode, Net Present Value-Methode oder Nettobarwertmethode, Discounted-Cash-Flow-Methode = DCF-Methode) beruht auf einer einfachen Entscheidungsregel, die angibt, welche Bedingung erfüllt sein muss, damit man eine Investition als vorteilhaft, lohnend oder wirtschaftlich bezeichnen kann. Die Entscheidungsregel, die die Voraussetzungen für die Vorteilhaftigkeit einer Investition fixiert, nennt man Kapitalwertkriterium. Wir wollen das Kapitalwertkriterium schrittweise entwickeln.

(1) Nach einer sehr einfachen und umgangssprachlich orientierten Fassung unserer Entscheidungsregel könnte man sagen:

Eine Investition lohnt sich, wenn sie mindestens so viel bringt wie sie kostet.

[1] Vgl. B. Herrmann, Anwendung der Investitionsrechnungsmethoden in der Praxis, S. 50 f.

Diese Entscheidungsregel setzt voraus, dass in den „Kosten" eines Objektes auch Zinsansprüche des Investors enthalten sind.

(2) Wir präzisieren die Formulierung, indem wir berücksichtigen, dass die zu verwendenden Rechnungselemente nicht Leistungen und Kosten, sondern Ein- und Auszahlungen sind. Wir verknüpfen die Rechnungselemente außerdem durch die Bedingung ≥, welche die verbale Formulierung „mindestens so viel wie" ersetzt.

Eine Investition lohnt sich, wenn Einzahlungen ≥ Auszahlungen

(3) Wir haben gelernt, dass Zahlungen, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten anfallen, nicht vergleichbar sind (ein Euro heute ist mehr wert als ein Euro morgen). Wir machen die Zahlungen vergleichbar, indem wir alle auf einen einheitlichen Zeitpunkt, den Zeitpunkt 0, beziehen.

Eine Investition lohnt sich, wenn barwertige Einzahlungen ≥ barwertige Auszahlungen

Ab Schritt (3) ist die Entscheidungsregel rechnerisch korrekt. Die folgenden Umformungen dienen nur noch der Vereinfachung.

(4) Wir schreiben die barwertigen Ein- und Auszahlungen kürzer als E_0 und A_0 und erhalten die Formulierung:

Investition lohnt, wenn $E_0 \geq A_0$ Investition lohnt, wenn $E_0 - A_0 \geq 0$

(5) Die Differenz zwischen den barwertigen Ein- und Auszahlungen ($E_0 - A_0$) bezeichnen wir als Kapitalwert C_0 und schreiben:

Investition lohnt, wenn $C_0 \geq 0$

Eine Investition ist also bei dem gewählten Zinssatz vorteilhaft, wenn der auf den Zeitpunkt Null bezogene Kapitalwert, also der Barwert aller Zahlungen, die zum Zeitpunkt 0 oder später anfallen, nicht negativ ist.

Die Formulierung „nicht negativ“ macht deutlich, dass man die Investition im Grenzfall $C_0 = 0$ nicht abzulehnen hat. Sie kann vielmehr als gerade eben vorteilhaft bezeichnet werden, da sie mit einer Geldanlage zum gewählten Kalkulationszinssatz gleichwertig ist. Der Investor erhält in diesem Fall sein eingesetztes Kapital zurück und eine Verzinsung der ausstehenden Beträge in Höhe seines Kalkulationszinssatzes von i.

Das Kapitalwertkriterium ist eine der wichtigsten Entscheidungsregeln, und zwar sowohl bei Investitionen als auch bei Finanzierungen. Die Größe des Kapitalwertes einer Investition - und damit deren Vorteilhaftigkeit - hängt ab von den „drei Z“:

- der Höhe der Zahlungen,
- deren zeitlicher Verteilung und
- dem Zinssatz.

Eine Investition lohnt sich (ist vorteilhaft, ist wirtschaftlich), wenn der von den drei Z bestimmte Kapitalwert nicht negativ ist. Dieser wird folgendermaßen definiert:

> Kapitalwert einer Investition ist die Summe der Barwerte aller durch diese Investition verursachten Zahlungen (= Ein und Auszahlungen).
> Oder: Kapitalwert ist die Differenz zwischen den barwertigen Einzahlungen und den barwertigen Auszahlungen einer Investition.

Dadurch, dass der Kapitalwert alle Geldbeträge einheitlich auf den Zeitpunkt 0, den Investitionsbeginn, abzinst, berücksichtigt er, dass man Geldbeträge, die erst in der Zukunft fällig werden, heute niedriger bewertet. Der Wertunterschied zwischen gegenwärtigen und zukünftigen Gütern wird durch das Abzinsen erfasst, dabei ist der Zinssatz Maßstab für die Zeitpräferenz, d. h. die Höherschätzung des Heutigen und die Minderschätzung des Künftigen durch den Menschen. Damit begründeten Ökonomen wie Böhm-Bawerk, Fisher und von Stackelberg schon vor langer Zeit die Existenz des Zinses[1].

[1] Vgl. E. von Böhm-Bawerk, Kapital und Kapitalzins, S. 318 ff. - I. Fisher, The Nature of Capital and Income, S. 202. - H. von Stackelberg, Grundlagen der theoretischen Volkswirtschaftslehre, S. 288 f.

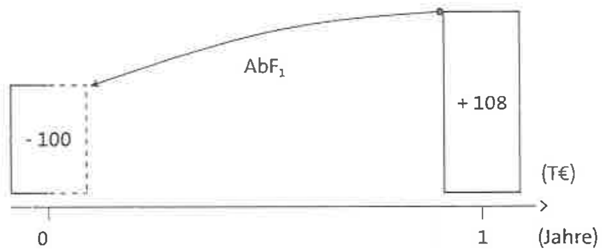
2.1.3 Kapitalwert im Zweizahlungsfall

Im Folgenden wird gezeigt, wie man den Kapitalwert eines Investitionsobjekts in unterschiedlichen Praxisfällen, d. h. bei unterschiedlichen Zahlungsverläufen ermitteln kann. Die einfachste denkbare Investition besteht aus lediglich zwei Zahlungen, einer Auszahlung und einer Einzahlung. Wir gehen von folgendem Fall aus.

***Beispiel** (Zweizahlungsfall)*

Die Gemeinde B kauft ein Grundstück für 100.000 €. Nach einem Jahr verkauft sie es an einen ansiedlungswilligen Unternehmer für 108.000 €. Überprüfen Sie die Vorteilhaftigkeit dieser Investition bei unterschiedlichen Kalkulationszinssätzen i.

Lösung



Rechnet der Investor mit einem Kalkulationszinssatz von 4 %, dann gilt für den Kapitalwert:

$$C_0 = E_0 - A_0 = 108.000 \cdot AbF_1 - 100.000$$

$$C_0 = 108.000 \cdot 0{,}961538 - 100.000 = 3.846\ (€)$$

Der Kapitalwert dieser Investition nimmt unterschiedliche Werte an, wenn Sie mit unterschiedlichen Kalkulationszinssätzen rechnen.

i (%)	AbF	$E_0 = 108.000 \cdot AbF$ (€)	$C_0 = E_0 - 100.000$ (€)
4	0,961538	103.846	3.846
6	0,943396	101.887	1.887
8	0,925926	100.000	0.000
10	0,909091	98.182	- 1.818
12	0,892857	96.429	- 3.571

Übers. 2.2: Kapitalwert bei unterschiedlichen Kalkulationszinssätzen

Rechnet der Investor in unserem Beispiel mit einem Zinssatz, der kleiner als 8 % ist, so ist der Kapitalwert positiv. Die Investition lohnt sich. Liegt der Kalkulationszinssatz über 8 %, so ist der Kapitalwert negativ. Die Investition lohnt sich nicht. Der kritische Wert für den Kalkulationszinssatz liegt bei 8 %. Hier ist der Kapitalwert Null. Die Investition ist in diesem Fall eben noch lohnend. Der Investor erreicht mit seiner Investition gerade seine Mindestverzinsungsanforderung - nicht mehr und nicht weniger.

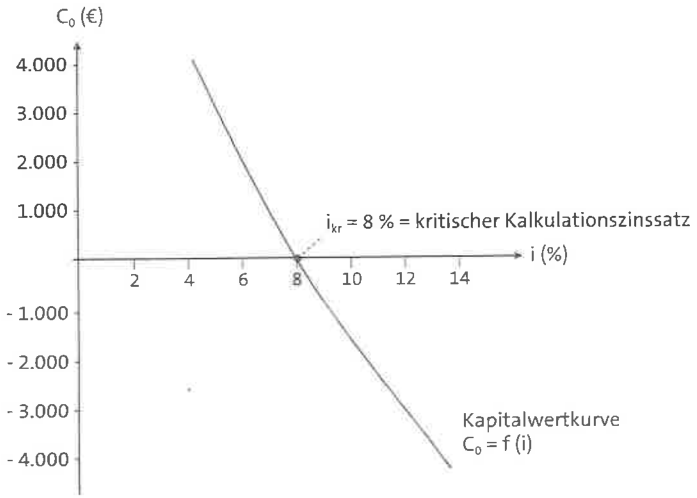


Abb. 2.1: Mit steigendem Kalkulationszinssatz nimmt der Kapitalwert ab

Die Kapitalwertkurve gibt an, welche Werte der Kapitalwert der betrachteten Investition unter sonst gleichen Umständen bei unterschiedlichen Kalkulationszinssätzen annimmt. Sie verläuft monoton fallend und leicht linksgekrümmt. Sie verdeutlicht, dass der Kapitalwert mit steigendem Kalkulationszinssatz sinkt. Das ist damit zu erklären, dass mit steigendem Zinssatz ein immer größerer Geldbetrag durch den Mindestverzinsungsanspruch des Investors aufgezehrt wird und für die Wiedergewinnung und den Überschuss immer weniger übrig bleibt.

***Beispiel** (Zweizahlungsfall)*

Ein Oldtimer-Händler kann einen gut erhaltenen Bugatti zum Preis von 100.000 € erwerben. Ein Sammler bietet ihm für das gute Stück 148.000 €, zahlbar nach fünf Jahren. Lohnen sich Kauf und Weiterverkauf für den Händler

- *bei einem Kalkulationszinsfuß von 8 %,*
- *bei einem Kalkulationszinsfuß von 10 %?*

Lösung

$i_1 = 8\,\%$ $\rightarrow$ $C_{0,1} = E_0 - A_0 = 148.000 \cdot AbF_5 - 100.000$

$C_{0,1} = 148.000 \cdot 0{,}680583 - 100.000$

$C_{0,1} = +726$ (€) $\rightarrow$ *Investition lohnt.*

$i_2 = 10\,\%$ $\rightarrow$ $C_{0,2} = E_0 - A_0 = 148.000 \cdot AbF_5 - 100.000$

$C_{0,2} = 148.000 \cdot 0{,}620921 - 100.000$

$C_{0,2} = -8.104$ € $\rightarrow$ *Investition lohnt nicht.*

Beispiel *(Kapitalwert und Zins)*

Beweisen Sie rechnerisch unter Benutzung des Abzinsungsfaktors (AbF), dass der Kapitalwert einer Investition mit steigendem Kalkulationszinssatz i sinkt. Gehen Sie dabei von der Investition mit der Auszahlung von 100.000 € im Zeitpunkt 0 und einer Einzahlung von 108.000 € im Zeitpunkt 1 aus.

Lösung

Der Kapitalwert C_0 der Investition

ergibt sich aus:

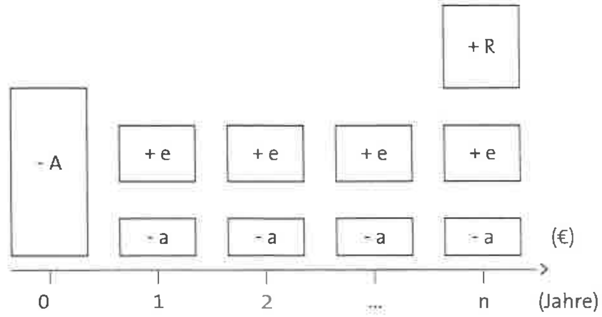
$$C_0 = 100.000 + 108.000 \cdot \frac{1}{1+i}$$

Ergebnis: *Wenn i steigt, wird der Abzinsungsfaktor $\frac{1}{1+i}$ kleiner. Dadurch wird stärker abgezinst und es sinkt der Einzahlungsbarwert E_0. Wegen $C_0 = E_0 - A_0$ nimmt der Kapitalwert entsprechend ab.*

2.1.4 Kapitalwert bei konstanten Jahreszahlungen

Im praktischen Fall löst eine Investition meist mehr als zwei Zahlungen aus. Wenn Sie etwa den Maschinenpark Ihres Betriebes vergrößern, dann wird zum Zeitpunkt 0 die Anschaffungsauszahlung A für die neue Maschine fällig. Während der Nutzungsjahre verursacht die neue Maschine jährliche Betriebs- und Instandhaltungsauszahlungen a, die als konstant betrachtet werden. Die Konstanzannahme gilt auch für die während der Nutzungsjahre erwarteten jährlichen Einzahlungen e. Am Ende der Nutzungszeit geht der Restwert R ein. Abgesehen von der Anschaffungsauszahlung können alle anderen Größen nur geschätzt werden. Sie sind mit Risiko behaftet. Sinnvollerweise rechnet man mit dem wahrscheinlichsten Wert[1].

[1] Zur ausführlichen Darstellung der Risikoberücksichtigung bei Investitionen vgl. K.-D. Däumler, Anwendung von Investitionsrechnungsverfahren in der Praxis, S. 171 ff.



Symbole

A = Anschaffungsauszahlung (€)
a = jährliche Betriebs- und Instandhaltungsauszahlungen (€/J)
e = jährliche Einzahlungen (€/J)
R = Restwert (€)
n = Nutzungsdauer (Jahre)

Der Kapitalwert einer solchen Investition lässt sich nach der Grundgleichung $C_0 = E_0 - A_0$ ausrechnen. Die barwertigen Einzahlungen erhalten Sie, indem Sie die Reihe der jährlichen Einzahlungen e mit dem Diskontierungssummenfaktor abzinsen und summieren und dazu den abgezinsten Restwert R addieren:

$$E_0 = e \cdot DSF_n + R \cdot AbF_n$$

Entsprechend ergibt sich der Gegenwartswert aller Auszahlungen als:

$$A_0 = a \cdot DSF_n + A$$

Für den Kapitalwert C_0 kann man mithin schreiben:

$$\boxed{C_0 = E_0 - A_0}$$

$$C_0 = e \cdot DSF_n + R \cdot AbF_n - a \cdot DSF_n - A$$

(2.8) $$\boxed{C_0 = (e - a) \cdot DSF_n + R \cdot AbF_n - A}$$ Kapitalwert bei konstanten Jahreszahlungen

Gemäß Gleichung (2.8) lässt sich der Kapitalwert einer Investition in vielen Praxisfällen bestimmen.

***Beispiel** (Kauf einer Zylinderschleifanlage)*

Für einen kommunalen Betriebshof soll eine Zylinderschleifanlage zum Preis von 150.000 € angeschafft werden. Durch die eigene Zylinderschleiferei können jährliche Auszahlungen von 80.000 € vermieden werden, die bislang für Fremdarbeiten zu zahlen waren. Die jährlichen Betriebs- und Instandhaltungsauszahlungen der eigenen Anlage schätzt man auf 50.000 €. Die Zylinderschleifanlage kann vermutlich 8 Jahre genutzt und danach gebraucht für 20.000 € weiterverkauft werden. Ist die Investition vorteilhaft, wenn der kommunale Investor mit einem Kalkulationszinssatz von i = 0,10 = 10 % rechnet?

Lösung

					+ 20.000	
	+ 80.000	+ 80.000	+ 80.000	+ 80.000	+ 80.000	
- 150.000	- 50.000	- 50.000	- 50.000	- 50.000	- 50.000	(€)
0	1	2	3	...	n = 8	(Jahre)

$C_0 = (e - a) \cdot DSF_8 + R \cdot AbF_8 - A$

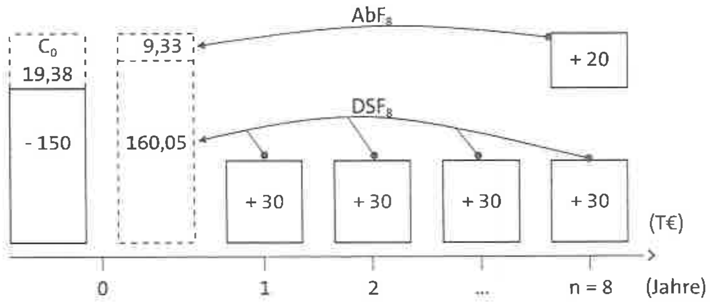
Jetzt setzen wir die Zahlen laut Aufgabe ein, wobei wir die Werte für den DSF und AbF dem Tabellenanhang entnehmen (i = 10 %; n = 8 Jahre).

$C_0 = 30.000 \cdot 5{,}334926 + 20.000 \cdot 0{,}466507 - 150.000$

$C_0 = 160.045 + 9.330 - 150.000$

$C_0 = 19.378$ (€)

***Ergebnis:** Die Investition ist vorteilhaft, da sich ein positiver Kapitalwert von 19.378 € ergibt. Der Investor gewinnt das eingesetzte Kapital zurück, erzielt auf die jeweils ausstehenden Beträge seine geforderte Mindestverzinsung in Höhe von 10 % und gewinnt zusätzlich einen barwertigen Überschuss von 19.378 €. Das verdeutlicht auch die Zeitstrahldarstellung.*



***Beispiel** (Interpretation eines positiven Kapitalwertes)*

Es ist zu zeigen, dass der positive Kapitalwert von 19.378 € (vgl. obiges Beispiel) für den Investor Folgendes bedeutet:

(1) Wiedergewinnung der Anschaffungsauszahlung, $C_0 < 0$

(2) Verzinsung der jeweils noch ausstehenden Beträge mit i = 10 %, $C_0 = 0$

(3) darüber hinaus einen barwertigen Überschuss von 19.378 €. $C_0 > 0$

Lösung

Wir stellen für das Beispiel der Zylinderschleifanlage eine Tabelle der Zahlungen auf, die für jedes Jahr ermittelt, wie viel von den laufenden Nettoeinzahlungen zur Verzinsung der noch im Investitionsobjekt steckenden Mittel benötigt wird und welcher Betrag zur Wiedergewinnung zur Verfügung steht.

Von der Nettoeinzahlung des ersten Jahres werden 15.000 € für die Verzinsung des zu Beginn dieses Jahres noch ausstehenden Betrages von 150.000 € benötigt. Zur Wiedergewinnung bleibt der Betrag von 15.000 €, um den sich das ausstehende Kapital zu Beginn des zweiten Jahres mindert. Folglich ist im zweiten Jahr ein gerin-

gerer Zinsanteil zu berechnen (13.500 €), und es bleibt ein höherer Wiedergewinnungsanteil (16.500 €). Dieser Prozess, geringerer Zinsanteil und wachsender Wiedergewinnungsanteil, setzt sich fort bis zum achten Jahr.

Jahr	*ausstehender Betrag am Jahresanfang* (€)	*Nettoeinzahlung* (€)	*davon Verzinsungsanforderung* (€)	*davon Wiedergewinnung* (€)	*davon nicht zur Verzinsung oder Wiedergewinnung benötigt* (€)
	I	II	III = I · i	IV = II - III	V = II - (III + IV)
1	*150.000*	*30.000*	*15.000*	*15.000*	*0*
2	*135.000*	*30.000*	*13.500*	*16.500*	*0*
3	*118.500*	*30.000*	*11.850*	*18.150*	*0*
4	*100.350*	*30.000*	*10.035*	*19.965*	*0*
5	*80.385*	*30.000*	*8.039*	*21.961*	*0*
6	*58.424*	*30.000*	*5.842*	*24.158*	*0*
7	*34.266*	*30.000*	*3.427*	*26.573*	*0*
8	*7.693*	*50.000*	*769*	*7.693*	*41.538*
		↑ *(inkl. Restwert)*	*Summe:*	*150.000*	

Übers. 2.3: Aufteilung der Nettoeinzahlungen in Zins und Wiedergewinnung

Zu Beginn des letzten Jahres stehen noch 7.693 € aus. Somit werden von den in diesem Jahr eingehenden Nettoeinzahlungen, die einschließlich Restwert 50.000 € betragen, nur 769 € zur Verzinsung benötigt. Da nur noch 7.693 € ausstehen, wird auch nur dieser Betrag zur Wiedergewinnung benötigt. Der Rest, also der Betrag, der weder zur Verzinsung noch zur Wiedergewinnung erforderlich ist, beläuft sich auf 41.538 €. Das ist der endwertige Überschuss, der auf den Zeitpunkt n bezogene Wert aller Ein- und Auszahlungen C_n.

$$C_0 = \text{Barwert der Nettoeinzahlungen, die nicht für Wiedergewinnung und Verzinsung benötigt werden} = \text{endwertiger Überschuss} \cdot AbF_n = C_n \cdot AbF_n$$

$$C_0 = 41.538 \cdot 0{,}466507$$

$$C_0 = 19.378\ (€)$$

***Ergebnis:** Die Investition ist wegen des positiven Kapitalwertes von 19.378 € vorteilhaft.*

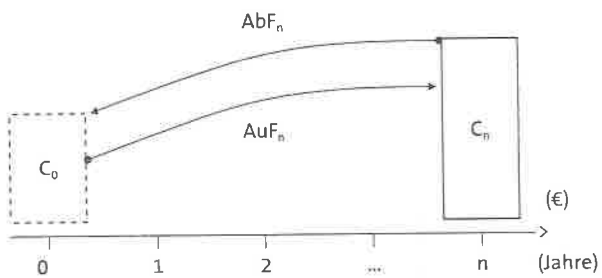
Die Tabelle zeigt Ihnen, dass der Investor im Laufe der 8-jährigen Nutzungsdauer

- *die Anschaffungsauszahlung von A = 150.000 € wiedergewinnt,*
- *das jeweils noch ausstehende Kapital mit i = 10 % verzinst erhält,*
- *darüber hinaus einen endwertigen Überschuss von C_n = 41.538 € erzielt, dem ein barwertiger Überschuss von C_0 = 19.378 € entspricht.*

2.1.5 Kapitalwert und Horizontwert

Horizontwert oder Endwert einer Investition ist die Summe aller mit dem Kalkulationszinssatz i auf den Zeitpunkt n (= Ende der Nutzungsdauer) aufgezinsten Ein- und Auszahlungen des Objekts. Die Bezeichnung Horizontwert besagt, dass sich dieser Wert auf das Investitionsende, auf das Ende des Planungshorizontes für das jeweilige Objekt bezieht. Der Horizontwert C_n repräsentiert den endwertigen Überschuss der Investition; der Kapitalwert C_0 stellt ihren barwertigen Überschuss dar. Zwischen dem barwertigen und dem endwertigen Überschuss besteht folgende Beziehung:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n = C_0 \cdot AuF_n$$
$$C_0 = C_n \cdot \frac{1}{(1+i)^n} = C_n \cdot AbF_n \qquad (2.9)$$



Ist der Kapitalwert gegeben, erhalten Sie den Horizontwert, indem Sie den Kapitalwert auf den Zeitpunkt n aufzinsen. Bei gegebenem Horizontwert ermitteln Sie den Kapitalwert, indem Sie den Horizontwert auf den Zeitpunkt 0 diskontieren (abzinsen). Eine Investition, die nach der Kapitalwertmethode vorteilhaft ist, ist stets auch nach der Horizontwertmethode lohnend. Kapitalwert und Horizontwert sind zwei Ausdrucksformen eines einheitlichen Prinzips, wonach eine Investition dann vorteilhaft ist, wenn sich für einen beliebigen Bezugszeitpunkt ein Überschuss ergibt.

2.1.6 Kapitalwert bei unterschiedlichen Jahreszahlungen

Bitte beachten Sie, dass in allen Fällen, in denen der Diskontierungssummenfaktor verwendet wurde, etwa bei Gleichung (2.9), vorausgesetzt wird, dass die Zahlungsreihe aus im Zeitablauf gleich bleibenden Jahreszahlungen besteht. In der Praxis darf man die Voraussetzung der zeitlichen Konstanz der Jahreszahlungen auch dann als erfüllt ansehen, wenn die tatsächlichen jährlichen Zahlungen jeweils in der Nähe eines Durchschnittswerts liegen. Werden die Abweichungen vom Durchschnitt jedoch zu hoch, so ist der Kapitalwert ohne Benutzung des Diskontierungssummenfaktors durch Abzinsen der einzelnen Jahresbeträge folgendermaßen zu ermitteln:

Kapitalwert bei Einzeldiskontierung

(2.10)
$$\boxed{C_0 = (e_1 - a_1) \cdot AbF_1 + (e_2 - a_2) \cdot AbF_2 + (e_3 - a_3) \cdot AbF_3 + \ldots + (e_n - a_n + R) \cdot AbF_n - A}$$

Symbole

e_n = laufende Einzahlungen im Jahr n
a_n = laufende Auszahlungen im Jahr n
R = Restwert
A = Anschaffungsauszahlung

***Beispiel** (Kapitalwert bei Einzeldiskontierung)*

Ein neu zu errichtendes Autobahnteilstück soll an den Ländereien eines Landwirtes entlangführen, der eine ergiebige Kiesgrube, die bislang nicht genutzt wurde, besitzt. Der Landwirt verpflichtet sich, der Baugesellschaft für 4 Jahre eine bestimmte Menge Kies frei Baustelle zu liefern und erhält dafür jährlich 280.000 €. Solange die Baustelle noch weit von der Kiesgrube entfernt ist, rechnet der Landwirt mit erheblichen Auszahlungen für den Transport des Kieses. Diese Auszahlungen sinken dann jedoch in dem Maße, wie sich die Baustelle, bedingt durch den Baufortschritt, der Kiesgrube nähert. Danach, wenn sich die Autobahnbaustelle bei weiterem Baufortschritt wieder von der Grube entfernt, steigen die Auszahlungen für den Transport wieder. Die Anschaffungsauszahlung, die vor Beginn des Kiesabbaus anfällt, beläuft sich auf 600.000 €. Nach 4 Jahren kann das Gerät für 200.000 € weiterveräußert werden. Als Verzinsung will der Landwirt mindestens 7 % auf seinen jeweiligen Kapitaleinsatz erzielen. Es fallen die aus dem Zeitstrahl ersichtlichen Zahlungen an. Lohnt sich die Investition?

				200.000	
	280.000	280.000	280.000	280.000	
- 600.000	- 190.000	- 80.000	- 70.000	- 160.000	(€)
0	1	2	3	4	(Jahre)

Lösung

Daten des Beispiels			*Kapitalwertberechnung*		
Zeitpunkt	*Auszahlungen A, a (€)*	*Einzahlungen e, R (€)*	*Nettoeinzahlungen (€)*	*AbF (7 %)*	*Barwerte (7 %) (€)*
	I	*II*	*III = II - I*	*IV*	*V = III · IV*
0	*600.000*	*-*	*- 600.000*	*-*	*- 600.000*
1	*190.000*	*280.000*	*90.000*	*0,934579*	*84.112*
2	*80.000*	*280.000*	*200.000*	*0,873439*	*174.688*
3	*70.000*	*280.000*	*210.000*	*0,816298*	*171.423*
4	*160.000*	*480.000 (inkl. Restwert)*	*320.000*	*0,762895*	*244.126*
Kapitalwert = Summe der Barwerte aller Zahlungen:					*74.349*

Übers. 2.4: Tabellarische Kapitalwertermittlung

Ergebnis: *Die Investition lohnt sich. Der Investor gewinnt das eingesetzte Kapital zurück. Daneben erhält er 7 % auf die ausstehenden Beträge. Darüber hinaus gewinnt er einen barwertigen Überschuss von 74.349 €.*

Beispiel *(Anschaffung einer Fräsmaschine)*

In einem Betrieb wurden Horizontalfräsarbeiten bislang an Fremdunternehmen vergeben. Es wird geplant, diese Arbeiten künftig selbst durchzuführen. Die anzuschaffende automatische Horizontalfräsmaschine soll 500.000 € kosten. Während der Nutzungszeit dieser Anlage fallen Betriebs- und Instandhaltungsauszahlungen von 100.000 € im ersten Jahr an; sie steigen von Jahr zu Jahr um 10.000 €. Der Restwert, der nach Ablauf der Nutzungsdauer von 5 Jahren realisiert werden kann, beläuft sich auf 30.000 €. Durch die Maschine werden künftig Auszahlungen an Fremdunternehmen in Höhe von 250.000 € jährlich vermieden.
Lohnt sich die Anschaffung, wenn der Unternehmer mit einem Kalkulationszinssatz von 8 % rechnet?

Lösung

					+ 30.000	
	+ 250.000	+ 250.000	+ 250.000	+ 250.000	+ 250.000	
- 500.000	- 100.000	- 110.000	- 120.000	- 130.000	- 140.000	(€)
0	1	2	3	4	5	(Jahre)

Daten des Beispiels			*Kapitalwertberechnung*		
Zeitpunkt	*Auszahlungen A, a (€)*	*Einzahlungen e, R (€)*	*Nettoeinzahlungen (€)*	*AbF (8 %)*	*Barwerte (8 %) (€)*
	I	*II*	*III = II – I*	*IV*	*V = III · IV*
0	*500.000*	-	- *500.000*	-	- *500.000*
1	*100.000*	*250.000*	*150.000*	*0,925926*	*138.889*
2	*110.000*	*250.000*	*140.000*	*0,857339*	*120.027*
3	*120.000*	*250.000*	*130.000*	*0,793832*	*103.198*
4	*130.000*	*250.000*	*120.000*	*0,735030*	*88.204*
5	*140.000*	*280.000 (inkl. Restwert)*	*140.000*	*0,680583*	*95.282*
Kapitalwert = Summe der Barwerte aller Zahlungen:					*45.600*

Übers. 2.5: Tabellarische Kapitalwertermittlung

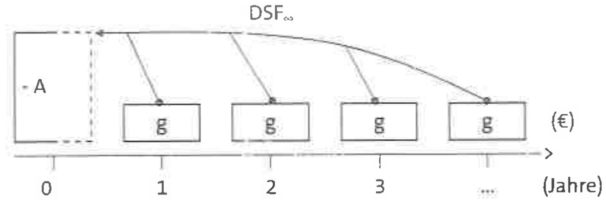
Ergebnis: *Die Investition lohnt sich, da der Investor zusätzlich zur Wiedergewinnung und Verzinsung einen barwertigen Überschuss von 45.600 € erzielt.*

2.1.7 Kapitalwert bei unbegrenzter Nutzungsdauer

Es gibt auch Investitionen, deren Lebensdauer nicht von vornherein begrenzt ist: Wenn Sie z. B. ein Grundstück, ein Fischwasser, eine ewige Rente oder einen Goldbarren kaufen, können Sie und Ihre Erben das jeweilige Objekt ohne jetzt erkennbares Zeitlimit nutzen, weil diese Objekte keinem Verschleiß unterliegen. Auch beim Kauf von Unternehmungen oder Unternehmungsteilen geht man häufig von unbegrenzter Nutzungsdauer aus - und sei es nur deshalb, weil man nicht weiß, wann diese Unternehmungen vom Markt verschwinden[1]. Im Übrigen gibt es investitionsrechnerisch keinen wesentlichen Unterschied zwischen dreißigjähriger und unbegrenzter Nutzungsdauer. Der Barwert bei dreißigjähriger Nutzungsdauer macht 94 Prozent des Barwertes bei unbegrenzter Nutzungsdauer aus[2].

[1] Zur Unternehmungsbewertung vgl. u. a.: K.-D. Däumler, Anwendung von Investitionsrechnungsverfahren in der Praxis, S. 11 ff.
[2] Vgl. Ebenda, S. 23 f.

Wenn der Kauf eines Grundstückes eine Anschaffungsauszahlung von A verursacht und gleich bleibende jährliche Nettoeinzahlungen von g verspricht, dann erhalten wir einen ins Unendliche reichenden Zeitstrahl.



Den Kapitalwert dieser Investition erhält man, indem man eine Grenzwertbetrachtung anstellt, d. h. indem man n gegen unendlich streben lässt. Für den Kapitalwert gilt bei einer Lebensdauer von n Jahren:

$$C_0 = g \cdot \underbrace{\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}}_{DSF} - A$$

Da die Lebensdauer n nur im Diskontierungssummenfaktor (DSF) vorkommt, genügt es, die Grenzwertbetrachtung für den DSF allein vorzunehmen.

$$DSF = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \qquad | \text{ kürzen mit } (1+i)^n \rightarrow$$

$$DSF = \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

Aus dieser Schreibweise erkennt man:

$$\lim_{n \to \infty} DSF = \frac{1}{i} \qquad \text{wegen} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(1+i)^n} = 0$$

Verwertet man diese Information in der Kapitalwertformel, so ergibt sich der einfache Ausdruck:

$$\boxed{C_0 = g \cdot \underbrace{\frac{1}{i}}_{\text{DSF für } n \rightarrow \infty} - A} \qquad (2.11)$$

Kapitalwert bei unbegrenzter Laufzeit

Beispiel *(Kauf eines Grundstücks)*

Ein Investor plant den Erwerb eines Grundstückes zum Preise von A = 90.000 €. Dieses Grundstück kann für unbegrenzte Zeit für den Nettobetrag von g = 10.000 € jährlich verpachtet werden. Ist diese Investition bei einem Zinssatz von i = 0,10 = 10 % vorteilhaft?

Lösung

$$C_0 = g \cdot \frac{1}{i} - A = 10.000 \cdot \frac{1}{0{,}10} - 90.000 = +10.000\ (€)$$

Ergebnis: *Die Investition „Kauf eines Grundstücks" ist wegen des positiven Kapitalwertes von 10.000 € vorteilhaft.*

2.1.8 Checkliste

Kapitalwert: Er ergibt sich aus der Differenz zwischen den barwertigen Ein- und Auszahlungen bei einem bestimmten Zinssatz. Der Kapitalwert ist eine wesentliche Entscheidungshilfe, wenn es um die Frage geht, ob eine Investition vorteilhaft ist, oder nicht.

Kapitalwertkriterium ($C_0 \geq 0$): Eine Investition mit positivem Kapitalwert ist vorteilhaft. Ein negativer Kapitalwert bedeutet, dass die Investition unwirtschaftlich ist. Bei einem Kapitalwert von Null ist es gleichgültig, ob man investiert oder sein Geld zum Kalkulationszinssatz anlegt.

Informationen: Der Entscheidungsträger muss Vorstellungen über den Verlauf der mit einer Investition verbundenen Zahlungen, über ihre Nutzungsdauer und über die Höhe des Kalkulationszinssatzes besitzen. Er muss A, R, e, a, n und i quantifizieren können.

Risiko: Die zahlenmäßigen Informationen sind naturgemäß mit Risiken behaftet; bei kleinen und mittleren Investitionen empfiehlt es sich, jeweils mit dem wahrscheinlichsten Wert zu rechnen. Bei Großinvestitionen sollte man spezielle Verfahren zur Risikoberücksichtigung einsetzen.

Berechnung: Die Berechnung des Kapitalwertes erfolgt unter Benutzung finanzmathematischer Faktoren, wobei drei Fälle zu unterscheiden sind:

(1) Zahlungsreihen mit im Zeitablauf konstanten Jahreszahlungen; hier wird der Diskontierungssummenfaktor eingesetzt.

(2) Zahlungsreihen mit unterschiedlichen Jahreszahlungen; hier ist eine Einzeldiskontierung mit Hilfe des Abzinsungsfaktors erforderlich.

(3) Zahlungsreihen mit im Zeitablauf konstanten Jahreszahlungen und unbegrenzter Laufzeit; hier wird der Diskontierungssummenfaktor zu

$$DSF = \frac{1}{i} \text{ (Grenzwert für } n \rightarrow \infty).$$

Interpretation: Der Kapitalwert ist genau zu interpretieren. Ein positiver Kapitalwert von z. B. + 100 € besagt: Der Investor gewinnt erstens sein eingesetztes Kapital zurück, erhält zweitens eine Verzinsung in Höhe seines Kalkulationszinssatzes auf die jeweils ausstehenden Beträge und gewinnt drittens einen barwertigen Überschuss von 100 €. Die Investition ist vorteilhaft.

Ein Kapitalwert von 0 € besagt: Der Investor gewinnt erstens sein eingesetztes Kapital zurück und erhält zweitens eine Verzinsung in Höhe seines Kalkulationszinssatzes auf die jeweils ausstehenden Beträge. Ein darüber hinausgehender barwertiger Überschuss wird nicht erzielt.

Ein Kapitalwert von z. B. - 100 € besagt: Der Investor erleidet einen barwertigen Verlust in Höhe von 100 €. Dieser Verlust kann dadurch zustandekommen, dass die geforderte Mindestverzinsung auf die ausstehenden Beträge nicht erreicht wird. Er kann auch dadurch entstehen, dass die investierten Mittel nicht oder nicht in voller Höhe wiedergewonnen werden. Die Investition ist in beiden Fällen unvorteilhaft.

Formeln und Symbole

Formeln	Symbole
$K_n = K_0 \cdot AuF$ $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$	K_n = Geldbetrag zum Zeitpunkt n K_0 = Geldbetrag zum Zeitpunkt 0 AuF = Aufzinsungsfaktor i = Zinssatz n = Anzahl Jahre
$K_0 = K_n \cdot AbF$ $K_0 = K_n \cdot (1+i)^{-n}$	AbF = Abzinsungsfaktor
$K_0 = g \cdot DSF$ $K_0 = g \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$	DSF = Diskontierungssummenfaktor g = konstanter Geldbetrag pro Jahr
$K_n = g \cdot EWF$ $K_n = g \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$	EWF = Endwertfaktor
$C_0 = E_0 - A_0$	C_0 = Kapitalwert E_0 = Barwert aller Einzahlungen A_0 = Barwert aller Auszahlungen
$C_0 = (e-a) \cdot DSF + R \cdot AbF - A$ $C_0 = (e-a) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} + R \cdot (1+i)^{-n} - A$	e = konstante jährliche Einzahlungen a = konstante jährliche Betriebs- und Instandhaltungsauszahlungen R = Restwert nach n Jahren A = Anschaffungsauszahlung
$C_0 = (e_1 - a_1)\,AbF_1 + (e_2 - a_2)\,AbF_2 + (e_3 - a_3)\,AbF_3 + \ldots + (e_n - a_n + R)\,AbF_n - A$	jährliche Zahlungen sind nicht konstant $(e_n - a_n)$ = Nettoeinzahlungen des Jahres n
$C_0 = (e - a) \cdot \frac{1}{i} - A$	$\frac{1}{i}$ = DSF bei unbegrenzter Laufzeit

Fragen und Aufgaben

2.1 Das Volkseinkommen eines Staates beläuft sich zu einer bestimmten Zeit auf 3.000 Mrd Euro. Welchen Wert weist es in 20 Jahren auf, wenn es in dieser Zeit durchschnittlich um 5 % pro Jahr in laufenden Preisen wächst?

2.2 Auf welche Summe wachsen 100 € bei einem Zinssatz von i = 0,08 = 8 % in 5, 10, 15, ..., 30 Jahren an? Stellen Sie die Höhe der Endwerte in Abhängigkeit von der Zeit grafisch dar.

2.3 Jemand macht mit 40 Jahren eine Erbschaft von 100.000 €, die er für 20 Jahre zu i = 0,08 = 8 % anlegt. Nach dieser Zeit lässt er sich die dann jeweils am Jahresende auf das akkumulierte Kapital anfallenden Jahreszinsen auszahlen. Wie hoch sind diese?

2.4 Ein Schuldner hat sich verpflichtet zu zahlen: 2.000 € nach 2 Jahren, 5.000 € nach 5 Jahren und 4.000 € nach 7 Jahren. Er will sich dieser Verpflichtung durch eine einzige Zahlung zum Zeitpunkt 0 entledigen. Wie hoch muss diese sein, wenn man mit i = 0,08 = 8 % rechnet?

2.5 Für ein Wohnhaus bietet A 120.000 € bar, B 150.000 € nach 5 Jahren und C 180.000 € nach 6 Jahren. Welches Angebot ist das günstigste
a) bei i = 0,06 = 6 %,
b) bei i = 0,10 = 10 %?

2.6 Ein bei einem Autounfall Geschädigter erhält eine Jahresrente von g = 6.000 € für n = 8 Jahre zugesprochen und möchte diese kapitalisieren. Welche sofortige Barabfindung K_0 entspricht der Rente beim Zinssatz von
a) i = 0,06 = 6 %,
b) i = 0,10 = 10 %?

2.7 Ein Lottospieler gibt jährlich g = 2.000 € für sein Hobby aus. Welchen Endwert K_n hat diese Zahlungsreihe bei einer Spielzeit von n = 30 Jahren und einem Zinssatz von i = 0,07 = 7 %?

2.8 Warum sind Zahlungen, die zu verschiedenen Zeitpunkten anfallen, nicht unmittelbar vergleichbar?

2.9 Was versteht man unter dem Begriff Zeitpräferenz?

2.10 Zeigen und begründen Sie, wie sich der Kapitalwert einer Investition mit steigendem Zinssatz ändert.

2.11 Was versteht man unter dem Kapitalwert?

2.12 Eine Investition besteht aus einer einmaligen Auszahlung von 10.000 €. Nach n = 5 Jahren erfolgt eine Einzahlung von 14.800 €. Ist diese Investition lohnend
a) beim Zinssatz von i = 0,08 = 8 %,
b) beim Zinssatz von i = 0,10 = 10 %?

2.13 Ein Autofahrer, der einen Unfall verschuldet hat, steht vor folgendem Entscheidungsproblem:

1. Er kann den Unfallschaden ohne Inanspruchnahme seiner Haftpflichtversicherung selbst regulieren. Die dabei entstehende und sofort fällige Auszahlung beläuft sich auf 1.500 €.

2. Er kann die Schadenregulierung seiner Haftpflichtversicherung überlassen, hat dann jedoch durch den Verlust des Schadenfreiheitsrabattes in den nächsten Jahren mit folgenden zusätzlichen Prämienzahlungen zu rechnen:
   1. Jahr: 500 € zusätzliche Prämienzahlung
   2. Jahr: 400 € zusätzliche Prämienzahlung
   3. Jahr: 400 € zusätzliche Prämienzahlung
   4. Jahr: 300 € zusätzliche Prämienzahlung
   5. Jahr: 300 € zusätzliche Prämienzahlung
   6. Jahr: 0 € zusätzliche Prämienzahlung

Welche Entscheidung empfehlen Sie, wenn mit einem Zinssatz von
a) i = 0,08 = 8 % oder
b) i = 0,10 = 10 % zu rechnen ist?

2.14 Ein Betrieb plant den Kauf einer Maschine zum Preise vom 10.000 €. Die Lebensdauer der Maschine wird auf n = 4 Jahre geschätzt. In jedem Jahr werden Einzahlungen von 5.000 € erwartet. Die jährlichen Betriebs- und Instandhaltungsauszahlungen werden mit 3.000 € veranschlagt. Nach Ablauf von vier Jahren kann ein Restwert von 4.000 € realisiert werden. Lohnt sich diese Investition bei einem Zinssatz von i = 0,06 = 6 %?

2.15 Ein Fischereirecht, das dem Berechtigten (bzw. dessen Erben) für alle Zeiten zusteht, soll durch eine einmalige geldliche Abfindung abgegolten werden. Welche Höhe hat der Abfindungsbetrag, wenn der Wert des Fischereirechtes mit jährlich 4.500 € angenommen wird,
a) beim Zinssatz von i = 0,08 = 8 %,
b) beim Zinssatz von i = 0,04 = 4 %?

2.16 Das Wasser- und Schifffahrtsamt (WSA) Kiel übereignet der am Nord-Ostsee-Kanal liegenden Gemeinde Sehestedt die Zuwegung zur dortigen Auto- und Personenfähre. Da die Gemeinde dann für die Instandhaltung der Zuwegung verantwortlich ist, erhält sie vom WSA einen einmaligen Geldbetrag. Wie hoch muss dieser sein, wenn die Gemeinde Sehestedt mit i = 0,06 = 6 % rechnet und die jährliche Instandhaltung mit durchschnittlich 25.000 € veranschlagt?

2.17 Steigt (+) oder fällt (-) der Kapitalwert einer Investition im Regelfall unter sonst gleichen Umständen mit

- steigender Anschaffungsauszahlung	A?	Kapitalwert =	( )
- steigenden jährlichen Betriebs- und Instandhaltungsauszahlungen	a?	Kapitalwert =	( )
- steigenden jährlichen Einzahlungen	e?	Kapitalwert =	( )
- steigender Nutzungsdauer	n?	Kapitalwert =	( )
- steigendem Kalkulationszinssatz	i?	Kapitalwert =	( )

2.18 Sie können eine kanadische Goldmine zum Festpreis von 1.000.000 € erwerben. Ihre Investitionsentscheidungen fällen Sie unter Benutzung der Kapitalwertmethode. Ihr Kalkulationszinsfuß beträgt 9 %.

a) Wie wäre zu entscheiden, wenn das Goldvorkommen eine konstante jährliche Nettoeinzahlung von 315.471 € für die Zeit von 4 Jahren erbringt? Danach ist das Vorkommen erschöpft. Weitere Zahlungen fallen nicht an.

b) Ermitteln Sie den Kapitalwert für den Fall, dass im Zeitpunkt 2 eine Großreparatur fällig wird, die den Nettobetrag einmalig um 215.471 € reduziert. Gleichzeitig stellt sich aber heraus, dass das Vorkommen nach 4 Jahren nicht erschöpft ist und im Verkaufsfall 270.000 € erbringen würde.

c) Warum kann man im Fall b) nicht (allein) mit dem Diskontierungssummenfaktor arbeiten?

d) Wie hoch ist der Kapitalwert der Investition „Kauf einer Goldmine", wenn unmittelbar vor dem Erwerb infolge neuer geologischer Erkenntnisse feststeht, dass das Vorkommen für unbegrenzte Zeit nutzbar ist und jährlich konstant 95.000 € netto abwirft?

2.19 Welche in die Investitionsrechnung eingehenden Werte sind normalerweise sicher, welche risikobehaftet? Beschreiben Sie kurz tabellarisch mögliche Risiken (= negative Abweichung des Istwertes vom Planwert) und Chancen (= positive Abweichung des Istwertes vom Planwert). Nutzen Sie dazu nachfolgende Tabelle.

In die Investitionsrechnung eingehende Größe	Risiko	Chance
Anschaffungsauszahlung A		
Jährliche Betriebs- und Instandhaltungsauszahlungen a		
Jährliche Einzahlungen e		
Nutzungsdauer n		
Restwert R		
Kalkulationszinssatz i		

2.20 Überlegen Sie, wie ein Formular zur Kapitalwertermittlung im Rahmen eines Tabellenkalkulationsprogramms aussehen muss. Fertigen Sie eine Skizze an, und vergleichen Sie diese mit dem Musterformular im Lösungsanhang.

www.nwb.de

NWB Studium Betriebswirtschaft

Grundlagen der Investitions- und Wirtschaftlichkeits-rechnung

- Aufgaben und Lösungen
- Testklausur
- Checklisten
- Tabellen für die finanzmathematischen Faktoren

Von
Professor Klaus-Dieter Däumler und
Professor Jürgen Grabe

12., vollständig überarbeitete Auflage

nwb STUDIUM

ISBN 978-3-482-52302-1 – 12., vollständig überarbeitete Auflage 2007

Druck: Stückle Druck und Verlag, Ettenheim

Vorwort

Dieses Buch enthält eine systematische Darstellung der Investitions- und Wirtschaftlichkeitsrechnung. Es erläutert die gängigen Investitionsrechnungsverfahren und bewertet sie im Hinblick auf ihre praktische Tauglichkeit. Deshalb ist es gleichermaßen für Studium und Praxis geeignet. Die deutschen Großunternehmungen wissen, wie wichtig Investitionsrechnungen als Entscheidungshilfen sind. Sie setzen durchschnittlich drei bis vier Investitionsrechnungsmethoden nebeneinander ein, um so zu einem abgerundeten Gesamtbild ihrer Investitionsvorhaben zu gelangen. Der Text des Buches ist in fünf Kapitel gegliedert:

- Grundlagen der Investitionsrechnung,
- Dynamische Verfahren,
- Statische Verfahren,
- Amortisationsrechnung,
- Kritische Werte-Rechnung.

Beim Gang durch den Text unterstützt Sie das Buch durch zahlreiche Beispiele, Abbildungen und Übersichten und durch die praxisorientierte Stoffauswahl. Am Kapitelende finden Sie Checklisten, die der Stoffwiederholung dienen, sowie Fragen und Aufgaben, die den Lernerfolg sichern und der Festigung des Gelernten dienen. Zur Selbstkontrolle können Sie, liebe Leser, die Antworten und Lösungen dem Anhang entnehmen. Sie sollten das Buch mit dem Bleistift in der Hand durcharbeiten und alle angebotenen Übungsmöglichkeiten nutzen, denn Investitionsrechnung lernen Sie nicht durch bloßes Lesen, sondern nur durch selbstständiges Üben.

Das Buch ist so aufgebaut, dass Sie es nicht nur als Lehr- und Nachschlagewerk, sondern auch als Grundlage zum Selbststudium verwenden können. Betrachten Sie jedes Kapitel als eine Lektion. Gehen Sie erst dann zur Folgelektion über, wenn Sie die Fragen und Aufgaben am Kapitelende gelöst haben. Nehmen Sie sich je Kapitel drei bis vier Stunden Zeit. Lösen Sie danach, das ist der krönende Abschluss, die Testklausur auf Seite 279. Sie schaffen das in weniger als 60 Minuten, weil die Klausur nach dem Multiple-choice-Verfahren aufgebaut ist. Erzielen Sie bei der Klausur mindestens 50 Prozent der Gesamtpunktzahl, haben Sie Ihre Zeit vorteilhaft investiert.